ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2019, № 1

УДК 519.7

Д.Я. Хусаинов[1], А.В. Шатырко[1,2], Б. Пужа[2], В. Новотна[2], В.А. Пилипенко[2,3]
[1]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
ул. Владимирская, 64, Киев, 01601
[2]Брненский технологический университет, Чехия
ул. Колейни, 2906/4, Брно, 612 00
[3]Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”, Украина
Пр. Победы, 37, Киев, 03056

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КЛАССА НЕЙРОСЕТЕЙ ПРЕДСТАВИМЫХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ

D.Ya. Khusainov[1], A.V. Shatyrko[1,2], B. Puzha[2], V. Novotna[2],V.A. Pylypenko[2,3]
[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
64, Volodymyrska St., Kyiv, 01601
[2]Brno University of Technology, Czech Republic
2906/4, Kolejni St., Brno, 612 00
[3]National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine
37, Peremohy Ave., Kyiv, 03056

INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF THE SOME CLASS OF NEURONET REPRESENTED BY WEEKNONLINEAR DIFFERENCE SYSTEMS

Статья посвящена динамическим процессам в сфере искусственного интеллекта, а именно в задачах нейродинамики. Рассматриваются проблемы устойчивости переходных процессов в нейронных сетях, динамика которых может быть описана системами слабонелинейных разностных уравнений. Результаты сформулированы в терминах прямого метода Ляпунова.

Ключевые слова: нейросеть, устойчивость, метод Ляпунова, разностные уравнения, нелинейность

The article is devoted to dynamic processes in the field of artificial intelligence, namely in the tasks of neurodynamics. The problems of stability of transient processes in neural networks, which dynamics can be described by systems of weakly nonlinear difference equations, are considered. Conditions are formulated in terms of the direct Lyapunov method.

Key words: neuronet, stability, Lyapunov’s method, difference equations, nonlinearity

Введение и анализ основных исследований в предметной области

В настоящее время перед научным сообществом на передний план все больше выходят проблемы создания новых эффективных информационных технологий для анализа и обработки больших информационных потоков. Человечество столкнулось с парадоксальной ситуацией, что с ростом информации наблюдается снижение осведомленности, а это усложняет аналитическую деятельность в различных областях. Следовательно, возникает востребованность появления новых областей науки и техники, одной из которых является искусственный интеллект [1-4], основные направления развития которого были определены в фундаментальных публикациях [1-3]. Одним из основополагающих направлений развития искусственного интеллекта является моделирование процессов, происходящих в человеческом мозге. Поскольку большинство процессов происходит в течение определенного периода времени, т.е. процессы являются динамическими, то методы построения и исследования математических моделей динамических систем имеют особое значение. Достаточно эффективно с этим справляется одно из

подразделений, если так можно выразиться, искусственного интеллекта – нейронные сети [1,2].

Исследования по искусственным нейронным сетям [5-7] связаны с тем, что способ обработки информации человеческим мозгом в корне отличается от методов, применяемых обычными компьютерами. В искусственных нейронных сетях все действия проводятся с искусственными нейронами. То есть можно сказать, что нейронная сеть представляет собой машину, моделирующую способ обработки человеческим мозгом конкретной задачи. Эта сеть обычно реализуется с помощью электронных компонентов или моделируется определенной компьютерной программой. Существенным вопросом при проектировании нейронных сетей является процесс их обучения. Построение математических моделей, описывающих явления обучения и функционирования искусственных нейронных сетей является частью проблемы искусственного интеллекта. Естественно, что все процессы, связанные с нейросетями: их обучение и функционирование, являются динамическими процессами, которые, в свою очередь, могут быть как непрерывными, так и дискретными по времени. Простейшими математическими аппаратами, используемыми для описания динамических процессов, являются функционально-дифференциальные уравнения и системы уравнений.

Настоящая работа, в каком-то смысле, является продолжением исследований качества переходных нейродинамических процессов в сетях Хопфилда, представленных авторами в статье [8]. Естественно, что любые нейросети могут работать как в непрерывном, так и в дискретном времени, в зависимости от того, какая модель использовалась для описания нейронов [9-12]. Непрерывный режим работы основывается на аддитивной модели [5,8]; дискретный режим работы основан на модели МакКаллока-Питца [13]. Можно вывести соотношение между устойчивыми состояниями дискретной и непрерывной моделей, переопределив соотношение между входом и выходом нейрона таким образом, чтобы истинными были две следующие упрощенные характеристики.

1. Выход нейрона имеет следующие асимптотические значения:

$$x_j = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad v_j = \infty, \\ -1 & \text{для} \quad v_j = -\infty \end{cases}$$

   x_j - j-й нейрон, состояние которого определяется $x_j = \varphi_j(v_j)$, v_j – вход функции активации j-го нейрона.
2. Средняя точка функции активации нейрона находится в начале координат, т.е.

$$\varphi_j(0) = 0.$$

Нейросетям в литературе, посвященной ассоциативной или контентно адресуемой памяти (content addressable memory), уделяется довольно большое внимание [5,7,11,14]. В сетевой модели ассоциативной памяти фиксированные точки соответствуют сохраняемым образам. Однако, синаптические веса сети, которые обеспечивают нахождение таких фиксированных точек, неизвестны, и задача заключается в их определении. Основной функцией ассоциативной памяти является восстановление образа (объекта), сохраненного в памяти, в ответ на представление неполной или зашумленной версии этого же объекта. Дискретные сети, выступающие в качестве ассоциативной памяти, имеют обычно две фазы работы: фазу сохранения и фазу извлечения. Эти обе фазы должны всегда сходиться к некоторому устойчивому состоянию, не говоря уже о самом процессе обучения построенной искусственной нейросети.

Постановка проблемы

Данная статья представляет собой исследование проблем устойчивости решений разностных систем, описывающих динамику нейронных сетей [5,9,11,12].

Исследование устойчивости систем разностных уравнений проводилось во многих работах. Например, можно указать работы [14-17]. В последнее время математический аппарат систем дифференциальных и разностных уравнений стал использоваться при исследовании динамики нейронных сетей [18-20]. В настоящей работе рассматриваются проблемы устойчивости стационарного положения равновесия нелинейной разностной системы. со «слабой нелинейностью». Под системой со слабой нелинейностью понимается система с диагональной линейной частью, нелинейные части которой удовлетворяют условию Липшица с «малыми» постоянными. При исследовании устойчивости положений равновесия используется прямой метод Ляпунова с функциями квадратичного вида [19,22,23].

Основные результаты. Система со слабой нелинейностью Сведение к системе с нулевым положением равновесия

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений со «слабой нелинейностью». Под термином «слабая нелинейность» понимается система с диагональной линейной частью и нелинейностями, удовлетворяющими условиям Липшица с малыми постоянными

$$y_i(k+1) = a_{ii} y_i(k) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_j(k)) + I_i,$$

$$i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Здесь a_{ii}, I_i $i = \overline{1,n}$ — постоянные, $f_{ij}(y_j)$, $i,j = \overline{1,n}$ — нелинейные функции одного аргумента, удовлетворяющие условию Липшица с постоянными L_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$, т.е.

$$\left| f_{ij}(y_j + \Delta y_j) - f_{ij}(y_j) \right| \le L_{ij} \left| \Delta y_j \right|, \; i,j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Предположим, что система уравнений

$$(1 - a_{ii}) y_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_j) = I_i, \; i = \overline{1,n} \qquad (3)$$

имеет решением точку $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$.

Произведем замену

$$y_i(k) = x_i(k) + y_i^0, \; i = \overline{1,n}.$$

После подстановки в систему (1) получаем

$$x_i(k+1) + y_i^0 = a_{ii}(x_i(k) + y_i^0) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j(k)) + I_i. \qquad (4)$$

Перепишем систему (4) в виде

$$x_i(k+1) = a_{ii} x_i(k) + \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(x_j(k) + y_j^0) - f_{ij}(y_j^0)] - [(1 - a_{ii}) y_i^0 - \sum_{j=1}^{n} y_j^0 - I_i], \qquad (5)$$

Обозначив

$$F_{ij}(x_j(k)) = f_{ij}(x_j(k) + y_j^0) - f_{ij}(y_j^0), \quad i,j = \overline{1,n},$$

И, используя соотношения (3), получаем, систему (5), которая принимает вид

$$x_i(k+1) = a_{ii} x_i(k) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x_j(k)). \qquad (6)$$

Поскольку

$$F_{ij}(0) = 0, \; i,j = \overline{1,n},$$

то после этой замены исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ системы (1) свелось к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (6).

Исследование устойчивости нулевого положения равновесия

Исследование устойчивости нулевого положения равновесия системы (1) будем проводить с использованием метода функций Ляпунова. Поскольку система (6) имеет диагональную линейную часть, то функция Ляпунова имеет вид суммы квадратов. Имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть система уравнений (3) имеет решение $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ и существуют постоянные $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0, \ldots, h_{nn} > 0$ при которых выполняются неравенства

$$h_{ii}(1 - a_{ii}^2) - \gamma_i > 0, \; i = \overline{1,n}, \qquad (7)$$

где

$$\gamma_i = h_{ii} K_i |a_{ii}| + \sum_{j=1}^{n} h_{jj} K_j L_{ij} (\frac{|a_{jj}|}{K_j} + 1), \qquad (8)$$

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \; .$$

Тогда положение равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ системы (1) является глобально асимптотически устойчивым.

Доказательство. Как было показано выше, исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ системы (1) можно свести к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (6). Для его исследования воспользуемся вторым методом Ляпунова. Поскольку линейная часть является диагональной матрицей, функцию Ляпунова выберем в виде квадратичной формы

$$V(x_1, x_2, ... x_n) = h_{11} x_1^2 + h_{22} x_2^2 + ... + h_{nn} x_n^2 .$$

Ее первая разность в силу системы (6) имеет вид

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), ..., x_n(k)) =$$
$$= h_{11}[a_{11} x_1(k) + \sum_{j=1}^{n} F_{1j}(x_j(k))]^2 +$$
$$h_{22}[a_{22} x_2(k) + \sum_{j=1}^{n} F_{2j}(x_j(k))]^2 + ...$$
$$+ h_{nn}[a_{nn} x_n(k) + \sum_{j=1}^{n} F_{nj}(x_j(k))]^2 -$$
$$[h_{11} x_1^2(k) + h_{22} x_2^2(k) + ... + h_{nn} x_n^2(k)] .$$

Преобразуем полученное выражение, выделив квадратичные составляющие, следующим образом

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), ..., x_n(k))$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} h_{ii}(1 - a_{ii}^2) x_i^2(k) +$$
$$+ h_{11}\{2 a_{11} x_1(k) \sum_{j=1}^{n} F_{1j}(x_j(k)) +$$
$$[\sum_{j=1}^{n} F_{1j}(x_j(k))]^2\} +$$
$$+ h_{22}\{2 a_{22} x_2(k) \sum_{j=1}^{n} F_{2j}(x_j(k)) +$$
$$[\sum_{j=1}^{n} F_{2j}(x_j(k))]^2\} + ... +$$
$$+ h_{nn}\{2 a_{nn} x_n(k) \sum_{j=1}^{n} F_{nj}(x_j(k)) +$$
$$[\sum_{j=1}^{n} (F_{nj}(x_j(k)))^2\}$$

Используя условия (2), наложенные на функции $f_{ij}(\bullet)$, $i, j = \overline{1, n}$, получим следующее неравенство

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), ..., x_n(k)) \le$$
$$\le -\sum_{i=1}^{n} h_{ii}(1 - a_{ii}^2) x_i^2(k) +$$
$$+ h_{11}\{2|a_{11}||x_1(k)| \sum_{j=1}^{n} L_{1j} |x_j(k)|$$
$$+ [\sum_{j=1}^{n} L_{1j} |x_j(k)|]^2\} +$$
$$+ h_{22}\{2|a_{22}||x_2(k)| \sum_{j=1}^{n} L_{2j} |x_j(k)| +$$
$$[\sum_{j=1}^{n} L_{2j} |x_j(k)|]^2\} + ... +$$
$$+ h_{nn}\{2|a_{nn}||x_n(k)| \sum_{j=1}^{n} L_{nj} |x_j(k)|$$
$$+ [\sum_{j=1}^{n} L_{nj} |x_j(k)|]^2\} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} h_{ii}(1 - a_{ii}^2) x_i^2(k) + S_1(x(k)) +$$
$$+ S_2(x(k)) + ... + S_n(x(k)),$$

где

$$S_1(x(k)) = h_{11}\{2|a_{11}||x_1(k)| \sum_{j=1}^{n} L_{1j} |x_j(k)| +$$
$$+ [\sum_{j=1}^{n} L_{1j} |x_j(k)|]^2\},$$
$$S_2(x(k)) = h_{22}\{2|a_{22}||x_2(k)| \sum_{j=1}^{n} L_{2j} |x_j(k)| +$$
$$+ [\sum_{j=1}^{n} L_{2j} |x_j(k)|]^2\}, \; ... \; ,$$
$$S_n(x(k)) = h_{nn}\{2|a_{nn}||x_n(k)| \sum_{j=1}^{n} L_{nj} |x_j(k)| +$$

$$+[\sum_{j=1}^{n} L_{nj}|x_j(k)|]^2\}.$$

Рассмотрим первое слагаемое $S_1(x(k))$. Используя очевидное неравенство

$$2AB \le A^2 + B^2, \qquad (9)$$

преобразуем $S_1(x(k))$ следующим образом

$$S_1(x(k)) \le h_{11}|a_{11}|\sum_{j=1}^{n} L_{1j}[|x_1(k)|^2 + |x_j(k)|^2] +$$

$$+h_{11}\sum_{j=1}^{n} L_{1j}^2|x_j(k)|^2 +$$

$$+h_{11}\{[L_{11}L_{12}(|x_1(k)|^2 + |x_2(k)|^2) + L_{11}L_{13}(|x_1(k)|^2$$

$$+|x_3(k)|^2) + \ldots + L_{11}L_{1n}(|x_1(k)|^2 + |x_n(k)|^2)] +$$

$$+[L_{12}L_{13}(|x_2(k)|^2 + |x_3(k)|^2) + \ldots$$

$$+L_{12}L_{1n}(|x_2(k)|^2 + |x_n(k)|^2)] + \ldots$$

$$+L_{1,n-1}L_{1n}(|x_{n-1}(k)|^2 + |x_n(k)|^2)\}$$

Собрав члены при одинаковых квадратах фазовых переменных, получаем следующее выражение

$$S_1(x(k)) =$$

$$h_{11}\{|a_{11}|[\sum_{j=1}^{n} L_{1j} + L_{11}] + L_{11}^2 +$$

$$L_{11}(L_{12} + L_{13} + \ldots + L_{1n})\}|x_1(k)|^2 +$$

$$h_{11}\{|a_{11}|[\sum_{j=1}^{n} L_{1j} + L_{11}] + L_{11}^2 +$$

$$+h_{11}\{|a_{11}|L_{12} + L_{12}^2 +$$

$$L_{12}(L_{11} + L_{13} + L_{14} + \ldots + L_{1n})\}|x_2(k)|^2 +$$

$$+h_{11}\{|a_{11}|L_{13} + L_{13}^2 +$$

$$L_{13}(L_{11} + L_{12} + L_{14} + \ldots + L_{1n})\}|x_3(k)|^2 + \ldots +$$

$$+h_{11}\{|a_{11}|L_{1n} + L_{1n}^2 +$$

$$L_{1n}(L_{11} + L_{12} + L_{13} + \ldots + L_{1,n-1})\}|x_n(k)|^2.$$

Обозначим

$$K_1 = \sum_{j=1}^{n} L_{1j}.$$

Тогда слагаемое $S_1(x(k))$ будет иметь вид

$$S_1(x(k)) = h_{11}K_1\{|a_{11}|(1 + \frac{L_{11}}{K_1}) + L_{11}\}|x_1(k)|^2 +$$

$$+h_{11}K_1\{|a_{11}|\frac{L_{12}}{K_1} + L_{12}\}|x_2(k)|^2 +$$

$$+h_{11}K_1\{|a_{11}|\frac{L_{13}}{K_1} + L_{13}\}|x_3(k)|^2 + \ldots +$$

$$+h_{11}K_1\{|a_{11}|\frac{L_{1n}}{K_1} + L_{1n}\}|x_n(k)|^2.$$

Или

$$S_1(x(k)) =$$

$$= h_{11}K_1\{[|a_{11}| + L_{11}(\frac{|a_{11}|}{K_1} + 1)]|x_1(k)|^2 +$$

$$L_{12}(\frac{|a_{11}|}{K_1} + 1)|x_2(k)|^2 + \ldots + L_{1n}(\frac{|a_{11}|}{K_1} + 1)|x_n(k|^2\}$$

Аналогично для других слагаемых будут иметь место соотношения

$$S_2(x(k)) =$$

$$= h_{22}K_2\{L_{21}(\frac{|a_{22}|}{K_2} + 1)|x_1(k)|^2 +$$

$$[|a_{22}| + L_{22}(\frac{|a_{22}|}{K_2} + 1)]|x_2(k)|^2 + \ldots +$$

$$+L_{2n}(\frac{|a_{22}|}{K_2} + 1)|x_n(k)|^2\},$$

…………………

$$S_n(x(k)) =$$

$$= h_{nn}K_n\{L_{n1}(\frac{|a_{nn}|}{K_n} + 1)|x_1(k)|^2 +$$

$$+L_{n2}(\frac{|a_{nn}|}{K_n} + 1)|x_2(k)|^2 + \ldots +$$

$$+[|a_{nn}| + L_{nn}(\frac{|a_{nn}|}{K_n} + 1)|x_n(k)|^2]\},$$

где

$$K_2 = \sum_{j=1}^{n} L_{2j}, \ \ldots, \ K_n = \sum_{j=1}^{n} L_{1n}.$$

Вернемся к оценке первой разности. Сгруппировав коэффициенты при одинаковых квадратах, получаем следующее

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)) \le$$

$$\le -\sum_{i=1}^{n} h_{ii}(1 - a_{ii}^2)x_i^2(k) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i^2(k),$$

$$\gamma_1 = h_{11}K_1|a_{11}| + \sum_{i=1}^{n} h_{ii}K_i L_{1i}(\frac{|a_{ii}|}{K_1}+1),$$

$$\gamma_2 = h_{22}K_2|a_{22}| + \sum_{i=1}^{n} h_{ii}K_i L_{2i}(\frac{|a_{ii}|}{K_2}+1),$$

$$\dots$$

$$\gamma_n = h_{nn}K_n|a_{nn}| + \sum_{i=1}^{n} h_{ii}K_i L_{ni}(\frac{|a_{ii}|}{K_n}+1).$$

И, если будут выполняться неравенства

$$h_{ii}(1-a_{ii}^2)-\gamma_i > 0,\ i=\overline{1,n},$$

то первая разность функции Ляпунова вдоль решений системы является отрицательно определенной функцией и, следовательно, нулевое положение равновесия системы (6) будет асимптотически устойчивым. ▲

Замечание 1. Из неравенств (7) видно, что необходимым условием асимптотической устойчивости решений к положению равновесия является «малость» нелинейных членов, т.е. постоянных Липшица.

При получении условий асимптотической устойчивости использовалось неравенство (9). Благодаря этому условия (7), (8) имели достаточно простой и легко проверяемый вид. Условия устойчивости можно сформулировать также в терминах положительной определенности симметричной матрицы, входящей в первую разность функции Ляпунова. Эти условия не такие «жесткие», но они не имеют такого явного вида. Введем следующие обозначения

$$S_1 = \begin{bmatrix} L_{11}L_{11} & L_{11}L_{12} & \dots & L_{11}L_{1n} \\ L_{12}L_{11} & L_{12}L_{12} & \dots & L_{12}L_{1n} \\ . & . & \dots & . \\ L_{1n}L_{11} & L_{1n}L_{12} & \dots & L_{1n}L_{1n} \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{12} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ L_{1n} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} L_{21}L_{21} & L_{21}L_{22} & \dots & L_{21}L_{2n} \\ L_{22}L_{21} & L_{22}L_{22} & \dots & L_{22}L_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ L_{2n}L_{21} & L_{2n}L_{22} & \dots & L_{2n}L_{2n} \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & L_{21} & \dots & 0 \\ L_{21} & 2L_{22} & \dots & L_{2n}0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & L_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

$$S_n = \begin{bmatrix} L_{n1}L_{n1} & L_{n1}L_{n2} & \dots & L_{n1}L_{nn} \\ L_{n2}L_{n1} & L_{n2}L_{n2} & \dots & L_{n2}L_{nn} \\ . & . & \dots & . \\ L_{nn}L_{21} & L_{nn}L_{n2} & \dots & L_{nn}L_{nn} \end{bmatrix},$$

$$G_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & L_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & L_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & 2L_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема 2. Пусть система уравнений (3) имеет решение $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ и существуют постоянные $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0, \dots,$ $h_{nn} > 0$, при которых главные диагональные миноры $\Delta_i > 0$, $i=\overline{1,n}$ матрицы

$$C_0 = diag\{\Lambda(h,a)\} - \sum_{i=1}^{n}[S_i + |a_{ii}|G_i] \quad (11)$$

положительно определены.

Тогда положение равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ системы (1) является глобально асимптотически устойчивым.

Здесь $diag\{\Lambda(h,a)\}$ – диагональная матрица с элементами $h_{ii}(1-a_{ii}^2)$, а матрицы S_i, G_i, $i=\overline{1,n}$ определенны в (10).

Доказательство. Как и в предыдущей теореме 1, сведем исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ системы (1) к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (6) и воспользуемся квадратичной функцией Ляпунова

$$V(x_1, x_2, ..x_n) = h_{11}x_1^2 + h_{22}x_2^2 + ... + h_{nn}x_n^2.$$

Как было показано ранее, ее первая разность в силу системы (6) имеет вид

$$\Delta V(x(k))= =-\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\left(1-a_{ii}^2\right)x_i^2(k)+S_1(x(k))+ +S_2(x(k))+...+S_n(x(k)), \qquad (12)$$

где $S_i(x(k))$, $i=\overline{1,n}$ определены ранее.

Распишем слагаемое $S_1(x(k))$.

Получаем

$$S_1(x(k))=2h_{11}|a_{11}||x_1(k)|\times \times\left[L_{11}|x_1(k)|+L_{12}|x_2(k)|+...+L_{1n}|x_n(k)|\right]+ +h_{11}\left[L_{11}|x_1(k)|+L_{12}|x_2(k)|+...++L_{1n}|x_n(k)|\right]^2=$$

$$=2h_{11}|a_{11}|L_{11}|x_1(k)|^2+ 2h_{11}|a_{11}|L_{12}|x_1(k)||x_2(k)|+...+ +2h_{11}|a_{11}|L_{1n}|x_1(k)||x_n(k)|+ +h_{11}L_{11}^2|x_1(k)|^2+h_{11}L_{12}^2|x_2(k)|^2+...+ +h_{11}L_{1n}^2|x_n(k)|^2+ +2h_{11}L_{11}L_{12}|x_1(k)||x_2(k)|+ +2h_{11}L_{11}L_{13}|x_1(k)||x_3(k)|+...+ +2h_{11}L_{11}L_{1n}|x_1(k)||x_n(k)|+ +2h_{11}L_{12}L_{13}|x_2(k)||x_3(k)|+ +2h_{11}L_{12}L_{14}|x_2(k)||x_4(k)|+...+ +2h_{11}L_{12}L_{1n}|x_2(k)||x_n(k)|+\dots +2h_{11}L_{1,n-2}L_{1,n}|x_{n-2}(k)||x_n(k)|+ +2h_{11}L_{1,n-1}L_{1,n}|x_{n-1}(k)||x_n(k)|+ +2h_{11}L_{12}L_{1n}|x_{n-1}(k)||x_n(k)|$$

Собрав коэффициенты при одинаковых фазовых координатах, получим следующее выражение:

$$S_1x(k)=h_{11}L_{11}(2|a_{11}|+L_{11})|x_1(k)|^2+ h_{11}L_{12}^2|x_2(k)|^2+...++h_{11}L_{1n}^2|x_n(k)|^2+ +2h_{11}L_{12}(|a_{11}|+L_{11})|x_1(k)||x_2(k)|+ +2h_{11}L_{13}\left(|a_{11}|+L_{11}\right)|x_1(k)||x_3(k)|+... ...+2h_{11}L_{1n}(|a_{11}|+L_{11})|x_1(k)||x_n(k)|+ +2h_{11}L_{12}L_{13}|x_2(k)||x_3(k)|+ +2h_{11}L_{12}L_{14}|x_2(k)||x_4(k)|+...+ +2h_{11}L_{12}L_{1n}|x_2(k)||x_n(k)|+\dots +2h_{11}L_{1,n-2}L_{1,n}|x_{n-2}(k)||x_n(k)|+ +2h_{11}L_{1,n-1}L_{1,n}|x_{n-1}(k)||x_n(k)|+ +2h_{11}L_{12}L_{1n}|x_{n-1}(k)||x_n(k)|.$$

Таким образом, зависимость $S_1(x(k))$ имеет вид квадратичной формы

$$S_1(x(k))=x^T(k)C_1x(k)$$

переменных $x^T(k)=\left(x_1(k),x_2(k),...,x_n(k)\right)$, $C_1=h_{11}[S_1+|a_{11}|G_1]$, с матрицами S_1, G_1, определенными в (10).

Распишем второе слагаемое $S_2(x(k))$ аналогично предыдущему. Соберем коэффициенты при одинаковых фазовых координатах и получим, что зависимость приобретет вид квадратичной формы

$$S_2(x(k))=x^T(k)C_2x(k)$$

переменных $x^T(k)=\left(x_1(k),x_2(k),...,x_n(k)\right)$, $C_2=h_{22}[S_2+|a_{22}|G_2]$, с матрицами S_2, G_2, определенными в (10).

Проделав аналогичные действия с остальными слагаемыми $S_i(x(k))$, $i=\overline{3,n}$, для последнего члена получим $S_n(x(k))=x^T(k)C_nx(k)$, $C_n=h_{nn}[x(k)]$, с матрицами S_n, G_n, определенными в (10). Таким образом, выражение (12) для первой разности функции Ляпунова в силу системы с использованием зависимостей (10), имеет вид

$$\Delta V(x(k))= =-\sum_{i=1}^{n} h_{ii}(1-a_{ii}^2)x_i^2(k)+ +x^T(k)\sum_{i=1}^{n}[S_i+|a_{ii}|G_i]x(k).$$

Условием отрицательной определенности первой разности функции Ляпунова является положительная определенность матрицы

$$C_0=diag\{\Lambda(h,a)\}-\sum_{i=1}^{n}[S_i+|a_{ii}|G_i],$$

где $diag\{\Lambda(h,a\}$ диагональная матрица с элементами $h_{ii}(1-a_{ii}^2)$, и матрицами S_i, G_i, $i=\overline{1,n}$, определенными в (10). А условием положительной определенности симметричной матрицы является положительность ее диагональных элементов. ▲

Пример. Рассмотрим динамику дискретной сети состоящей из двух нейронов (Рис. 1).

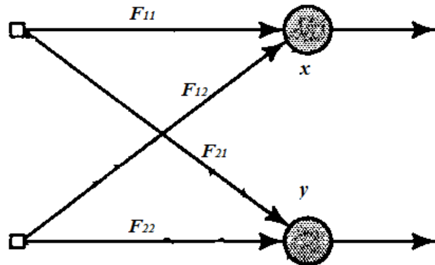


Рис. 1. Двухнейронная однослойная сеть прямого распространения

Фактически ее представляет система разностных уравнений на плоскости

$$x(k+1) = a_{11}x(k) + F_{11}(x(k)) + F_{12}(y(k)),$$
$$y(k+1 = a_{22}y(k) + F_{21}(x(k)) + F_{22}(y(k)).$$

Функции $F_{11}(x(k))$, $F_{12}(y(k)$, $F_{21}(x(k))$, $F_{22}(y(k)$ непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица с постоянными L_{ij}, по соответствующим аргументам. Тогда условия (7), (8) имеют вид

$$\gamma_1 < h_{11}(1 - a_{11}^2, \quad \gamma_2 < h_{22}(1 - a_{22}^2),$$
$$K_1 = L_{11} + L_{12}, \quad K_2 = L_{21} + L_{22},$$

где

$$\gamma_1 = h_{11}K_1|a_{11}| + h_{11}K_1L_{11}(\frac{|a_{11}|}{K_1} + 1) +$$
$$+ h_{22}K_2L_{12}(\frac{|a_{22}|}{K_2} + 1),$$
$$\gamma_2 = h_{22}K_2|a_{22}| + h_{11}K_1L_{21}(\frac{|a_{11}|}{K_1} + 1) +$$
$$+ h_{22}K_2L_{22}(\frac{|a_{22}|}{K_2} + 1)$$

Заключение

Рассмотрены системы разностных уравнений с выделенной отрицательной диагональной частью и нелинейностью специального вида. Такие системы встречаются при исследовании динамики нейронных сетей, которые функционируют в дискретном времени. Получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия. Исследования устойчивости проведены с использованием прямого метода Ляпунова. Благодаря подходу (LMI), все условия имеют вид конструктивно проверяемых матричных неравенств. Для наглядности результатов в работе приведен пример, иллюстрирующий простоту условий в случае двух нейронов в сети.

Acknowledgment

Work is conducted under the Agreement on scientific cooperation between the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv and the Faculty of Business Management, Brno University of Technology 04.08.2016.

The paper was supported by the Czech Science Foundation: The project “Development of new methods of solving dynamic models of corporate processes management”, No.: GA16-03796S.

The second author was supported by the project MeMoVEV90800005/2140 c.p. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_27/0008371 01.06.2018

Литература

1. Russel, S., Norvig, P. (2010) Artificial Intelligent. A modern Approach. 3rd Ed. Prentice Hall.
2. Nilsson, N.J. (2009) The quest for artificial intelligence. A history of ideas and achievements. Cambridge University Press.
3. Luger, G.F. (2009) Artificial intelligence. Strategies and methods of solutions of complex problems. 6ThEd. Pearson Education.
4. Амосов, Н.М. (1985) Алгоритмы разума. – Киев, Наукова думка.
5. Haykin, S. (1998) Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second edition. - Prentice Hall, New Jersey.
6. Архангельский, В.И., Богаенко, И.Н., Грабовский, Г.Г., Рюмшин, Н.А. (1999) Нейронные сети в системах автоматизации. – Киев, «Техника», 364 с.
7. Scott, A.C. (1977) Neurophysics, New York: Wiley.
8. Шатырко, А.В., Диблик, Й., Хусаинов, Д.Я., Баштинец, Я. (2017) Сходимость процессов нейродинамики в модели Хопфилда. Науково-теоретичний журнал «*Штучний інтелект*», № 3-4. С. 139-148.
9. Pisarchik, A.N., Radin, M.A., Vogt, R. (2015) Nonautonomous Discrete Neuron Model with Multiple Periodic and Eventually Periodic Solutions. Hyndawi Publishing Corporation. Discrete *Dynamics in Nature and Society*. Article ID 147282.
10. Brokan, E., Sadyrbaev, F. (2009) On a differential system arising in the network control theory. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 21, No. 5, 687-701 pp.

11. Liang, J., Cao, J., Ho, D.W.C. (2005) Discrete-time bidirectional associative memory neural networks with variable delays. *Physics Letters A* 335. 226-234 pp.
12. Atslega, S., Finaskins, D., Sadyrbaev, F. (2016) On a Planar System Arising in the Network Control Theory. *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol. 21, No. 3, pp. 385-398.
13. McCulloch, W.S., Pitts, W. (1943) A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematica1 Biophysics*, vol. 5, pp. 115-133.
14. Cohen, M.A., Grossberg, S. (1983) Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. IEEE *Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-13, pp. 815-826.
15. Gopalsamy, K. (2007) Leakage Delays in BAM. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325, pp.1117-1132.
16. Berezansky, L., Idels, L., Troib. L. (2011) Global dynamics of the class on nonlinear nonautonomous systems with time-varying delays. J. *Nonlinear Anal.* 74, No. 18, pp.7499-7512.
17. Brokan, E., Sadyrbaev, F. (2015) Attracting Sets in Gene Regulatory Systems. International Conference on Simulation, *Modelling and Mathematical Statistics* (SMMS 2015).
18. Сіренко, А.С., Шакотько, Т.І., Хусаінов, Д.Я. (2014) Про один підхід до дослідження стійкості моделі нейронних мереж з запізненням другим методом Ляпунова. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*, Серія: Фізико-математичні науки, в. 4. С.232-237.
19. Хусаинов, Д.Я., Шатырко, А.В. (1997) Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев, Изд.-во Киевского университета. - 236 с.
20. Хусаинов, Д.Я., Диблик, Й., Баштинец, Я., Сиренко, А.С. (2015) Устойчивость, неравномерная по запаздыванию, одной слабонелинейной системы с последействием. *Труды института прикладной математики и механики*, Т.29. С.129-146.
21. Бычков, А.С., Хусаинов, Д.Я. (2003) Оценки экспоненциальной сходимости разностных систем с запаздыванием. *Дифференциальные уравнения*, Т. 38, № 9. С.1285-1287.
22. Шатирко, А.В., Хусаінов, Д.Я. (2012) Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. К.: ДП «Інформац.-аналіт. агентство». 73 с.
23. Ляпунов, А.М. (1980) Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., Гос. издательство технико-теоретической литературы. 472 с.

References

1. Russel, S., Norvig, P. (2010) Artificial Intelligent. A modern Approach. 3rd Ed. Prentice Hall.
2. Nilsson, N.J. (2009) The quest for artificial intelligence. A history of ideas and achievements. Cambridge University Press.
3. Luger, G.F. (2009) Artificial intelligence. Strategies and methods of solutions of complex problems. 6ThEd. Pearson Education.
4. Amosov, N.M. (1985) Algoritmy razuma. – Kiev, Naukova dumka.
5. Haykin, S. (1998) Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second edition. - Prentice Hall, New Jersey.
6. Arkhangel'skiy, V.I., Bogaenko, I.N., Grabovskiy, G.G., Ryumshin, N.A. (1999) Neyronnie seti v sistemah avtomatizatsii. – Kiev, «Tekhnika», 364 s.
7. Scott, A.C. (1977) Neurophysics, New York: Wiley.
8. Shatyrko, A.V., Diblik, J., Khusainov, D.Ya., Bastinec, J. (2017) Shodimost' processov neyrodinamiki v modeli Hophilda. Naukovo-teoretychnyi zhurnal «*Shtuchniy intelekt*», № 3-4. S. 139-148.
9. Pisarchik, A.N., Radin, M.A., Vogt, R. (2015) Nonautonomous Discrete Neuron Model with Multiple Periodic and Eventually Periodic Solutions. Hyndawi Publishing Corporation. Discrete *Dynamics in Nature and Society*. Article ID 147282.
10. Brokan, E., Sadyrbaev, F. (2009) On a differential system arising in the network control theory. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 21, No. 5, 687-701 pp.
11. Liang, J., Cao, J., Ho, D.W.C. (2005) Discrete-time bidirectional associative memory neural networks with variable delays. *Physics Letters A* 335. 226-234 pp.
12. Atslega, S., Finaskins, D., Sadyrbaev, F. (2016) On a Planar System Arising in the Network Control Theory. *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol. 21, No. 3, pp. 385-398.
13. McCulloch, W.S., Pitts, W. (1943) A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematica1 Biophysics*, vol. 5, pp. 115-133.
14. Cohen, M.A., Grossberg, S. (1983) Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. IEEE *Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-13, pp. 815-826.
15. Gopalsamy, K. (2007) Leakage Delays in BAM. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325, pp.1117-1132.
16. Berezansky, L., Idels, L., Troib. L. (2011) Global dynamics of the class on nonlinear nonautonomous systems with time-varying delays. J. *Nonlinear Anal*. 74, No. 18, pp.7499-7512.
17. Brokan, E., Sadyrbaev, F. (2015) Attracting Sets in Gene Regulatory Systems. International Conference on Simulation, *Modelling and Mathematical Statistics* (SMMS 2015).
18. Sirenko, A.C., Shakot'ko, T.I., Khusainov, D.Ya. (2014) Pro odyn pidhid do doslidzhennya stiykosti modeli neyronnyh merezh z zapiznennyam drugym metodom Lyapunova. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka*, Seriya: Phizyko-matematychni nauky, V.4. S. 232-237.

19. Khusainov, D.Ya., Shatyrko, A.V. (1997) Metod funktsiy Lyapunova v issledovanii ustoychivosti differentsialno-funktsionalnyh sistem. - Kiev, Izd-vo Kievskogo universiteta, 236 s.
20. Khusainov, D.Ya., Diblik, J., Bastinec, J., Sirenko, A.C. (2015) Ustoychivost', neravnomernaya po zapazdivaniyu, odnoy slabonelineynoy sistemy s posledeystviem. *Trudi instituta prikladnoy matematiki i mekhaniki*, T.29, S. 129-146.
21. Bychkov, A.S., Khusainov, D.Ya. (2003) Otsenki eksponentsial'noy shodimosti raznostnyh system s zapazdivaniem. *Differentsial'nye uravneniya*, T. 38, №9. S. 1285-1287.
22. Shatyrko, A.V., Khusainov, D.Ya. (2012) Stiykist' neliniynyh system regulyuvannya z pislyadieyu. K.: DP «Informats.-analit. agentstvo». 73 p.
23. Lyapunov, A.M. (1980) Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya. M.-L., Gos. Izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury. 472 s.

RESUME

D.Ya. Khusainov, **A.V. Shatyrko**, **B. Puzha**, **V. Novotna**

Investigation of the dynamics of the some class of neuronet represented by weeknonlinear difference equations

The article is a study of the dynamics of discrete neural networks, the functioning of which can be described using the mathematical apparatus of difference systems of equations with a special type of nonlinearity. Such networks in particular are often used as models of associative memory. The stability problems of the stationary equilibrium state of a nonlinear difference system with a “weak nonlinearity” are considered. A system with a weak nonlinearity is understood as a system with a diagonal linear part, nonlinear additions to which satisfy the Lipschitz condition with “small” constants.

The direct Lyapunov method was chosen as the research method. The aim of the investigation is to establish the fact of asymptotic stability of solutions. First, a system with a weak non-linearity of a special type reduces to a system with a zero equilibrium position. Then using the traditional Lyapunov function of a quadratic form, sufficient conditions for the global asymptotic stability of this solution was proves. Conditions have the form of certain inequalities, they are rather “hard” in the sense that they require substantial smallness of nonlinear terms, i.e. Lipschitz constants. Further, the stability conditions are formulated in terms of the positive definiteness of a special symmetric matrix, which included in the first difference of the Lyapunov function. These conditions are not so “hard”, but they do not have such an explicit form. At the end of the article there is an example of a two-dimensional system, the purpose of which is to demonstrate the visibility and applied constructiveness of the obtained results.

Надійшла до редакції 08.02.2019

